Concursul Fractal

A Șasea Ediție, 21 Septembrie 2025

Problema 1. Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie este scris un număr. Pe rând, aceștia scad din numărul scris pe foaie o cifră nenulă a sa și înlocuiesc numărul cu rezultatul obținut. De exemplu atunci când pe foaie este scris numărul 123, cel care mută ar putea lăsa pe foaie numerele $123 - 3 = 120$, $123 - 2 = 121$ și $123 - 1 = 122$. Câștigă acel jucător care scrie 0 pe foaie după mutarea sa. Dacă Marius este primul care scade cifra din numărul scris, pentru ce valori ale numărului inițial el va câștiga?

Soluție: Marius câștigă dacă și numai dacă primul număr (fie acesta n) nu este divizibil la 10. Vom arăta aceasta prin inducție după n. Dacă primul număr este 1, evident Marius câștigă. Acum, dacă primul număr este n, pentru n nedivizibil la 10, el poate să scadă din acesta ultima cifră a sa, și obține un număr mai mic decât n, ultima cifră a căruia este 0, deci pentru care Alexandru pierde. Dacă n are ultima cifră 0, indiferent de ce scade Marius, Alexandru o să obțină un număr care nu este divizibil la 10 mai mic decât n deci o să poată câștiga.

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale pozitive care, pentru orice $n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$ satisfac următoarele relații:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^{2026} - y_n^{2025} + 1 \\ \\ y_{n+1} = y_n^{2026} - x_n^{2025} + 1 \end{cases}$$

S-a constatat că una și aceeași valoare apare de o infinitate de ori în șirul y_n. Găsiți toate valorile posibile ale numerelor x_1 și y_1.

Soluție: Adunând cele două relații obținem: $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n^{2026} + y_n^{2026} - x_n^{2025} - y_n^{2025} + 2$ sau, cu alte cuvinte: $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n + (x_n^{2025} - 1)(x_n - 1) + (y_n^{2025} - 1)(y_n - 1)$. Este clar că, pentru orice număr real x, $(x^{2025} - 1)(x - 1) \geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = 1$. Astfel, $x_{n+1} + y_{n+1} \geq x_n + y_n$ pentru orice n. Acum, fie numerele $n_1, n_2 \ldots$ astfel încât $y_{n_1} = y_{n_2} = \ldots$ și notăm această valoare comună cu y. Avem că: $x_{n_{i+1}} + y_{n_{i+1}} \geq x_{n_i+1} + y_{n_i+1} \geq x_{n_i} + y_{n_i} + (y - 1)(y^{2025} - 1)$. Astfel, dacă $y \neq 1$, avem că $x_n + y_n$ poate lua orice valoare, oricât de mare, căci $x_{n_i} + y_{n_i} \geq (n_i - 1)(y^{2025} - 1)(y - 1)$, dar aceasta este imposibil, căci pentru orice j cu $y_j = y$, avem $y^{2026} + 1 > x_j^{2025}$. Astfel, $y = 1$. Este clar că dacă $x_n \geq y_n$, $x_{n+1} \geq x_n$. Astfel, obținem două cazuri. Primul: există un a cu $y_a = 1$ și $x_a > 1$, atunci șirul x_n crește nemărginit de mare, căci avem mereu că $x_{n+1} \geq x_n$ și atunci când $y_n = 1$ avem $x_{n+1} = x_n^{2026}$. Dacă $x_n < 1$ pentru orice n cu $y_n = 1$ obținem că $y_{n+1} > 1$, și deci y_n nu mai poate fi egal cu 1. Și deci rămânem cu unicul caz, atunci când $(1, 1)$ aparține șirului, caz în care, dacă $x_n = y_n = 1$, obținem $x_{n-1} = y_{n-1} = 1$. Astfel obținem $x_1 = y_1 = 1$, unica posibilitate.

Problema 3. În triunghiul ABC, fie I_A, I_B și I_C centrele cercurilor exînscrise triunghiului, opuse vârfurilor A, B și C respectiv. Arătați că dacă centrul de greutate al triunghiului $I_AI_BI_C$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci aceste triunghiuri sunt echilaterale.

Soluție: Vom considera ca cunoscute unele proprietăți ale liniei Euler a unui triunghi ce nu este echilateral. În particular, linia Euler a triunghiului conține centrul cercului circumscris acestuia, centrul său de greutate, centrul cercului celor nouă puncte și ortocentrul acestuia. Dacă numim aceste puncte O, G, N_9 și H, ele sunt coliniare în ordinea în care au fost scrise cu $ON_9 = HN_9$ și $2OG = HG$. Revenind la problemă, pentru triunghiul $I_AI_BI_C$, punctele A, B și C sunt picioarele perpendicularelor, căci dreapta AI_A este bisectoarea unghiului A și e perpendiculară pe bisectoarea exterioară a acestuia care e dreapta I_BI_C. Astfel, centrul cercului înscris triunghiului ABC, I este ortocentrul triunghiului $I_AI_BI_C$, iar centrul cercului circumscris acestuia, O este centrul cercului celor nouă puncte în triunghiul $I_AI_BI_C$. Obținem că dreapta Euler a triunghiului $I_AI_BI_C$ este dreapta OG, unde O și G sunt centrul cercului circumscris și centrul de greutate a triunghiului ABC, care este și dreapta Euler a triunghiului ABC, și mai mult ca atât, I este reflecția ortocentrului triunghiului ABC peste centrul cercului circumscris acestuia, ce e imposibil căci AI este bisectoarea interioară a unghiului OAH.

Problema 4. Fie $d(n)$ numărul de divizori naturali ai numărului natural n. Găsiți toate funcțiile $f(x)$ din mulțimea numerelor naturale nenule în mulțimea numerelor naturale nenule care satisfac $f(a) + f(b) = f(a + b)$ dacă $d(a)d(b)$ este pătrat perfect.

Soluție: Inițial, e clar că $d(x)^2$ este pătrat perfect, deci $2f(x) = f(2x)$ pentru orice număr natural x (În particular $f(8) = 8f(1)$). Acum, vom arăta că $f(x+8) = f(x)+8f(1)$ pentru orice număr impar x. Pentru aceasta vm arăta inițial un rezultat intermediar, și anume că există un $\alpha \in \mathbb{N}$ cu $\alpha(\alpha + 3)d(x)$ fiind un pătrat perfect. Dacă $d(x)$ este un pătrat perfect alegem $\alpha = 1$. Dacă nu, considerăm ecuația de tip Pell $n^2 - d(x)m^2 = 1$, despre care e cunoscut că are măcar o soluție (m_0, n_0) în numere naturale nenule. Alegem $\alpha = 3d(x)m_0^2$ și avem $\alpha(\alpha+3)d(x) = (3m_0n_0d(x))^2$. Acum, ca să arătăm concluzia de mai sus, e suficient să arătăm că există un t cu $d(2^tx)d(2^{t+3}) = (t + 4)(t + 1)d(x)$ fiind un pătrat perfect, căci atunci am avea: $2^t(f(x) + f(8) = f(2^tx) + f(2^{t+3}) = f(2^tx + 2^{t+3}) = 2^tf(x + 8)$. E clar acum că $t = \alpha - 1$ satisface. Avem acum că $f(9) = f(8) + f(1) = 9f(1)$, $f(7) + f(2) = f(9)$, $f(5) + f(2) = f(7)$ și $f(3) + f(2) = f(5)$. Din aceste relații rezultă că $f(x) = xf(1)$, pentru orice x impar cu $x \leq 9$, iar cu $f(x+8) = f(x)+8f(1)$ pentru x impar, avem că $(x) = xf(1)$ pentru orice x impar, ce împreună cu $f(2x) = 2f(x)$ implică $f(x) = xf(1)$ pentru orice x natural, ce clar satisface condiția problemei.